Analiza funkcjonalna
Lista ~~6~~ 7

Zad 1. Wyznaczyć operator sprzężony do każdego z operatorów danych w zadaniu ~~4~~ 3 na liście 5

Zad 2. Wyznaczyć operator sprzężony do operatora $A : H \to H$, gdzie

N	H	A	N	H	A
1.	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t t^2 s x(s) ds$	3.	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^{t^2} ts^3 x(s) ds$
2.	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t) = \int_t^1 e^s x(s) ds$	4.	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^t t^2 s x(s) ds - \int_0^{t^2} ts^3 x(s) ds$

Zad 3. Niech H, K będą przestrzeniami Hilberta oraz niech $A, B : H \to K$ będą liniowymi operatorami ograniczonymi i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wykazać następujące własnośći operacji sprzężenia

i) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$ (*anty-liniowość*)

ii) $(AB)^* = B^* A^*$ (*anty-multiplikatywność*)

iii) $(A^*)^* = A$ (*inwolucyjność*)

iv) $\|A^*\| = \|A\|$ (*izometryczność*)

v) $\|A^* A\| = \|A\|^2$ (*C^*-równość*)

Zad 4. Niech H, K będą przestrzeniami Hilberta i niech $A \in L(H)$ będzie operatorem samosprzężonym, to jest $A^* = A$. Pokazać, że

$$\|A\| = r(A).$$

Wyciągnąć stąd ogólny wniosek, że dla dowolnego ograniczonego operatora liniowego $A : H \to K$ zachodzi

$$\|A\| = \sqrt{r(A^* A)}.$$

Zad 5. Obliczyć normę operatora $A : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_2)$, gdy

N	n	m	A	N	n	m	A	N	n	m	A
1.	2	2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	2.	2	2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	3.	2	2	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4.	2	2	$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$	5.	2	3	$\begin{pmatrix} i & i & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}$	6.	2	3	$\begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
7.	3	2	$\begin{pmatrix} e^{it} & 1 \\ 1 & 0 \\ e^{it} & 1 \end{pmatrix}$	8.	3	3	$\begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	9.	3	3	$\begin{pmatrix} i & 1 & i \\ -i & -1 & -i \\ 2i & 2 & 2i \end{pmatrix}$

Zad 6. Zbadać zbieżność ciągu operatorów $A_n : X \to Y$, gdy

N	X	Y	A_n
1.	l_1	l_1	$A_n x = (x(1), ..., x(n), 0, ...)$
2.	l_2	l_2	$A_n x = ((1+\frac{1}{n})x(1), ..., (1+\frac{1}{n})x(n), x(n+1), x(n+2), ...)$
3.	c_0	c_0	$A_n x = (0, ..., 0, x(n), 0, 0, ...)$
4.	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_n x)(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}})$
5.	$C^{(1)}[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(A_n x)(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}})$
6.	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$(A_n x)(t) = (t^n - t^{2n}) x(t)$
7.	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(A_n x)(t) = (1 - t^n) x(t)$